

Exercice.

1) D'abord si $P, Q \in \mathbb{R}[x]$, on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^e e^{-x} P(x) Q(x) = 0$$

donc $\int_0^{+\infty} e^{-x} |P(x) Q(x)| dx < +\infty$.

Ainsi $\langle P/Q \rangle$ est bien définie.



5

• L'application $(P, Q) \mapsto \langle P/Q \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}[x]$ par linéarité de l'intégrale.

• Si $P \in \mathbb{R}[x]$, on a $\langle P, P \rangle \geq 0$.

• Enfin si $\langle P, P \rangle = 0 \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-x} (P(x))^2 dx = 0$
 $\Rightarrow P(x) = 0$, pour $x \in [0, +\infty[\Rightarrow P = 0$.

3

2) Par la formule de Leibnitz, on a

$$\begin{aligned} (e^{-x} x^n)^{(n)} &= \sum_{k=0}^n C_n^k (e^{-x})^{(k)} (x^n)^{(n-k)} \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k e^{-x} n(n-1) \dots (n-k+1) x^{n-k} \\ &= e^{-x} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k n(n-1) \dots (n-k+1) x^k \end{aligned}$$

Ainsi $L_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \frac{n!}{n! k!} x^k = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} C_n^k x^k$.

4

3) On a $\int_0^x P(x) e^{-x} dx$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{n!} \left[(e^{-x} x^n)^{(n-1)} P(x) - (e^{-x} x^n)^{(n-2)} P'(x) + \dots \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{n-1} (e^{-x} x^n)^{(1)} P^{(n-1)}(x) \right]_0^x + \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x e^{-x} x^n P^{(n)}(x) dx \end{aligned}$$

ici on a intégré n -fois par parties.

Or de la formule de Leibnitz, on voit que toutes les dérivées $k^{\text{ième}}$ de $e^{-x} x^n$ pour $k < n$ sont de la forme $P_{n,k} e^{-x}$ où $P_{n,k}$ est un polynôme par conséquent le crochet ci-dessus vaut 0 quand x tend vers $+\infty$.

4:) On a $d \equiv \mathbb{P}_m = m$, ainsi $\langle L_0, L_1, \dots, L_m \rangle$ constitue une base de $\mathbb{R}_m[x]$.

Pour $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$, on a

$$\langle \mathbb{P}_m, \mathbb{P}_n \rangle = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^n \mathbb{P}_m^{(n)}(x) dx$$

• Si $m < n$, $\langle L_m, L_n \rangle = 0$ car $L_m^{(n)}(x) = 0$.

• Si $m = n$, $\mathbb{P}_n^{(n)} = (-1)^n$, d'où

$$\langle \mathbb{P}_m, \mathbb{P}_m \rangle = \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = I_n$$

En intégrant par parties on obtient

$$I_m = I_{m-1} = \dots = I_0 = 1.$$

Ainsi (L_0, \dots, L_n) est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[x]$.

5) La condition ii) signifie que pour tout n

$$\langle L_0, \dots, L_n \rangle = \langle e_0, \dots, e_n \rangle$$

D'après le procédé d'orthogonalisation de Schmidt on sait que cette condition jointe à i), entraîne l'existence de $(e_n)_n$ uniques au signe près,

$$\text{mais } L_n(0) = 1 > 0 \Rightarrow e_n = L_n.$$

Partie I

1° On a: $\varphi_\lambda(t) = \frac{t^{\lambda-1}}{1+t} \sim_{t \rightarrow 0} t^{\lambda-1} \Rightarrow \varphi_\lambda$ est intégrable sur $]0, 1[$

$\varphi_\lambda(t) = \frac{t^{\lambda-1}}{1+t} \sim_{t \rightarrow +\infty} t^{\lambda-2} \Rightarrow \varphi_\lambda$ est intégrable sur $[1, +\infty[$

4

Ainsi I et J existent.

De plus $J(1-\lambda) = \int_0^1 \frac{t^{-\lambda}}{1+t} dt$

En posant $s = 1/t$

$$J(1-\lambda) = \int_1^{+\infty} \frac{s^{\lambda-1}}{1+s} ds$$

d'où $I(\lambda) = J(\lambda) + J(1-\lambda)$

2°

(a) $J(\lambda) = \int_0^1 \frac{t^{\lambda-1}}{1+t} dt = \int_0^1 \left(t^{\lambda-1} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n \right) dt$

On pose $S_n(t) = t^{\lambda-1} \sum_{k=0}^n (-1)^k t^k$, $t \in]0, 1[$.

• la suite $(S_n)_n$ converge simplement sur $]0, 1[$ vers φ_λ

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $t \in]0, 1[$

$$|S_n(t)| = t^{\lambda-1} \left| \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1+t} \right| \leq 2 \frac{t^{\lambda-1}}{1+t} \in L^1(]0, 1[)$$

T.C.D $\Rightarrow J(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 t^{\lambda+n-1} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\lambda}$

(b) $I(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\lambda} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)-\lambda}$

2

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\lambda} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-\lambda}$$

$$= \frac{1}{\lambda} + 2\lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - \lambda^2}$$

3) a)

• Pour $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 0$ car f_λ est paire, et

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(\lambda t) \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos(\lambda+n)t + \cos(n-\lambda)t) dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(\lambda+n)t}{\lambda+n} + \frac{\sin(n-\lambda)t}{n-\lambda} \right]_0^\pi$$

$$= \frac{2\lambda \sin(\lambda\pi)}{\pi} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - \lambda^2}$$

$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{2\lambda \sin(\lambda\pi)}{\pi \lambda^2} = \frac{2\pi \sin(\lambda\pi)}{\pi \lambda^2}$

2,5

b) Du théorème de Dirichlet, on déduit que $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{2\lambda \sin(\lambda\pi)}{\pi \lambda^2} = \frac{2\pi \sin(\lambda\pi)}{\pi \lambda^2}$

3

$$f_\lambda(t) = \frac{\sin(\lambda\pi)}{\lambda\pi} + 2\lambda \frac{\sin(\lambda\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - \lambda^2} \cos(nt)$$

c) • Pour $t=0$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - \lambda^2} = \left(1 - \frac{\sin(\lambda\pi)}{\lambda\pi} \right) \frac{\pi}{2\lambda \sin(\lambda\pi)}$$

$$= \frac{\pi}{2\lambda \sin(\lambda\pi)} - \frac{1}{2\lambda^2}$$

• Pour $t=\pi$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - \lambda^2} = \frac{\pi}{2\lambda \sin(\lambda\pi)} \left(\frac{\sin(\lambda\pi)}{\lambda\pi} - \cos(\lambda\pi) \right)$$

$$= \frac{\pi}{2\lambda} \left(\frac{1}{\lambda\pi} - \cotg(\lambda\pi) \right)$$

4

• D'après la formule de Parseval, on a

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2(\lambda\pi)}{\lambda^2 \pi^2} + 2 \lambda^2 \frac{\sin^2(\lambda\pi)}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n^2 - \lambda^2)^2} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos^2(\lambda t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (1 + \cos(2\lambda t)) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\pi + \frac{\sin(2\lambda\pi)}{2\lambda} \right) \end{aligned}$$

$$2 \frac{\lambda^2 \sin^2(\lambda\pi)}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n^2 - \lambda^2)^2} = \frac{1}{2} + \frac{\sin(2\lambda\pi)}{4\pi\lambda} - \frac{\sin^2(\lambda\pi)}{\lambda^2 \pi^2}$$

$$\text{d'où} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n^2 - \lambda^2)^2} = \frac{\pi^2}{2\lambda^2} \left[\frac{1}{2\sin^2(\lambda\pi)} + \frac{\cotg(\lambda\pi)}{2\lambda\pi} - \frac{1}{\lambda^2 \pi^2} \right].$$

1

$$\begin{aligned} 4) \text{ On a } \quad \Gamma(\lambda) &= \frac{1}{\lambda} + 2\lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - \lambda^2} \\ &= \frac{1}{\sin(\lambda\pi)} \end{aligned}$$



Partie II.

$$1^{\circ}) \text{ a) } e^{-t} t^{x-1} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t^{x-1}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 e^{-t} t^{x-1} = 0$$

ce qui implique que Γ est bien définie.

3

$$\text{On a } \Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt$$

$$\text{en intégrant par parties : } \begin{aligned} u &= t^x \rightarrow u' = x t^{x-1} \\ v' &= e^{-t} \rightarrow v = -e^{-t} \end{aligned}$$

$$\Gamma(x+1) = \left[-e^{-t} t^x \right]_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = x \Gamma(x).$$

$$\text{b) En posant } s = \sqrt{t}, \quad \Gamma(1/2) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi}.$$

2

(c) On pose le changement de variables

$$s = x t^\beta$$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-x t^\beta} t^{\alpha-1} dt &= \frac{1}{\beta} \int_0^{+\infty} e^{-s} \left(\frac{s}{x}\right)^{\frac{\alpha-1}{\beta}} \frac{ds}{x \left(\frac{s}{x}\right)^{\frac{\beta-1}{\beta}}} \\ &= \frac{1}{\beta} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-s} s^{\frac{\alpha}{\beta}-1}}{x^{1/\beta}} ds = \frac{1}{\beta x^{1/\beta}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right). \end{aligned}$$

2°

(a) Soit $\eta > 0$.

Pour $t > \eta$, on a :

$$\begin{aligned} \exp(-x t^\beta) &= \exp(-x_0 t^\beta) \exp(-(x-x_0) t^\beta) \\ &\leq \exp(-x_0 t^\beta) \exp(-(x-x_0) \eta^\beta) \end{aligned}$$

(b) Soit $x > x_0$.

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{+\infty} e^{-x t^\beta} t^{\alpha-1} (h(t) - h(0)) dt \right| &= \left| \int_0^\eta e^{-x t^\beta} t^{\alpha-1} (h(t) - h(0)) dt \right| \\ &\quad + \left| \int_\eta^{+\infty} e^{-x t^\beta} t^{\alpha-1} (h(t) - h(0)) dt \right| \\ &\leq \int_0^\eta e^{-x t^\beta} t^{\alpha-1} |h(t) - h(0)| dt \\ &\quad + \int_\eta^{+\infty} e^{-x t^\beta} t^{\alpha-1} (|h(t)| + |h(0)|) dt \end{aligned}$$

$$\leq \int_0^{+\infty} e^{-xt^\beta} t^{\alpha-1} |h(t) - h(0)| dt + \\ \exp(-(x-x_0)\eta^\beta) \int_\eta^{+\infty} e^{-x_0 t^\beta} t^{\alpha-1} (|h(t)| + |h(0)|) dt.$$

ceci d'après 2° a.

(c) Soit $\varepsilon > 0$

h est continue en 0 \Rightarrow il existe $\eta > 0$ tq

$$\forall t \in [0, \eta], |h(t) - h(0)| \leq \varepsilon.$$

donc $\beta x^{\alpha/\beta} \int_0^\eta e^{-xt^\beta} t^{\alpha-1} |h(t) - h(0)| dt \leq \varepsilon \beta x^{\alpha/\beta} \int_0^\eta e^{-xt^\beta} t^{\alpha-1} dt$

D'autre part : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\alpha/\beta} \exp(-(x-x_0)\eta^\beta) = 0 \leq \varepsilon \Gamma(\alpha/\beta)$

il existe alors $A \geq x_0$ tq $\forall x \geq A$.

$$\beta x^{\alpha/\beta} \exp(-(x-x_0)\eta^\beta) \int_\eta^{+\infty} e^{-x_0 t^\beta} t^{\alpha-1} (|h(t)| + |h(0)|) dt$$

ce qui donne que $\leq \varepsilon \quad \forall x \geq A$. (via 1° c)

$$\left| \beta x^{\alpha/\beta} \int_0^{+\infty} e^{-xt^\beta} t^{\alpha-1} h(t) dt - \Gamma(\alpha/\beta) h(0) \right| \\ = \beta x^{\alpha/\beta} \left| \int_0^{+\infty} e^{-xt^\beta} t^{\alpha-1} (h(t) - h(0)) dt \right| \\ \leq \varepsilon (1 + \Gamma(\alpha/\beta))$$

3°

$$(a) \forall t > 0, \varphi'(t) = 1 - 1/t$$

t	0	1	$+\infty$
$\varphi'(t)$		-	+
$\varphi(t)$	$+\infty$	0	$+\infty$

4

On pose $u = t/x$

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt = \int_0^{+\infty} e^{-xu} e^{x \log(xu)} x du \\ &= x^{x+1} \int_0^{+\infty} e^{-x(u - \log u)} du \\ &= x^{x+1} \cdot e^{-x} \int_0^{+\infty} e^{-x\varphi(u)} du. \end{aligned}$$

2

(b) Voir le tableau de variation de φ .

2

(c) On pose $s = \sqrt{\varphi(t)}$

$$\begin{aligned} * \int_1^{+\infty} e^{-x\varphi(t)} dt &= \int_0^{\infty} e^{-xs^2} k_1^2(s) ds \\ * \int_0^1 e^{-x\varphi(t)} dt &= - \int_0^{+\infty} e^{-xs^2} k_2^2(s) ds \end{aligned}$$

2

(d) Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} \sqrt{x} \int_0^{+\infty} e^{-x\varphi(t)} dt &= \sqrt{x} \int_0^1 e^{-x\varphi(t)} dt + \sqrt{x} \int_1^{+\infty} e^{-x\varphi(t)} dt \\ &= \sqrt{x} \int_0^{+\infty} e^{-xs^2} (k_1^2(s) - k_2^2(s)) ds \end{aligned}$$

D'après le lemme Watson:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \int_0^{+\infty} e^{-x\varphi(t)} dt = \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\pi}} \left(\underbrace{k_1'(0) - k_2'(0)}_{-\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2\pi}.$$

4°-

(a) En utilisant 3°-a on a: $\forall x > 0$

1

$$\frac{\Gamma(x+1)}{x^{x+1/2} e^{-x}} = \sqrt{x} \int_0^{+\infty} e^{-x\varphi(t)} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2\pi}$$

d'où $\Gamma(x+1) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi} x^{x+1/2} e^{-x}.$

(b) soit $s > 0$

2

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-s} \frac{\Gamma(x+s)}{\Gamma(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-s} \frac{x}{x+s} \frac{\Gamma(x+s+1)}{\Gamma(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-s} \frac{x}{x+s} \frac{\sqrt{2\pi}(x+s)^{x+s+1/2} e^{-x-s}}{\sqrt{2\pi} x^{x+1/2} e^{-x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+s} \left(\frac{x+s}{x} \right)^{x+s+1/2} e^{-s} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+s} \left(1 + \frac{s}{x} \right)^x \left(1 + \frac{s}{x} \right)^{s+1/2} e^{-s} = 1 \end{aligned}$$

Partie III.

1,5

1) a) $\beta(x+1, y) = \int_0^1 t^x (1-t)^{y-1} dt$

on pose $u = t^x \rightarrow u' = x t^{x-1}$

$v' = (1-t)^{y-1} \rightarrow v = -\frac{(1-t)^y}{y}$

$\beta(x+1, y) = \left[\frac{t^x (1-t)^y}{y} \right]_0^1 + \frac{x}{y} \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^y dt$

$= \frac{x}{y} \beta(x, y+1)$

1

b) $\beta(x, y+1) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^y dt$

$= \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt - \int_0^1 t t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$

$= \beta(x, y) - \beta(x+1, y)$

2

c) On a $\beta(x, y) = \beta(x, y+1) + \beta(x+1, y)$

$= \left(1 + \frac{y}{x} \right) \beta(x+1, y) = \frac{x+y}{x} \beta(x+1, y)$

d) De c), on déduit par récurrence que

$\beta(x, y) = \frac{x+y}{x} \frac{x+y+1}{x+1} \dots \frac{x+y+n}{x+n} \beta(x+n+1, y)$

2

mais $\Gamma(x+n+1) = (x+n)(x+n-1) \dots x \Gamma(x)$

3°

- 11 -

$$(a) \quad s = \frac{t}{1-t}$$

$$\begin{aligned} \beta(x, y) &= \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{s}{1+s} \right)^{x-1} \left(\frac{1}{s+1} \right)^{y-1} \frac{ds}{(1+s)^2} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{s^{x-1}}{(1+s)^{x+y}} ds. \end{aligned}$$

(b) En utilisant 2-c pour $y = 1-x$, $x \in]0, 1[$.

$$\begin{aligned} \text{on a: } \Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) &= \beta(x, 1-x) \Gamma(1) \\ &= \beta(x, 1-x) = \int_0^{+\infty} \frac{s^{x-1}}{1+s} ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4^\circ (a) \quad \beta(x, x) &= \int_0^{1/2} (t(1-t))^{x-1} dt + \int_{1/2}^1 (t(1-t))^{x-1} dt \\ &= \int_0^{1/2} (t(1-t))^{x-1} dt + \int_{1/2}^1 ((1-s)s)^{x-1} ds \\ &= 2 \int_0^{1/2} (t(1-t))^{x-1} dt. \end{aligned}$$

(b) On pose $s = 4t(1-t)$.

$$\begin{aligned} \text{donc } \beta(x, x) &= 2 \int_0^{1/2} (t(1-t))^{x-1} dt = 2 \int_0^{1/4} \left(\frac{s}{4} \right)^{x-1} \frac{ds}{4\sqrt{1-s}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{2^{2x-2}} \int_0^1 s^{x-1} (1-s)^{-1/2} ds \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2^{2x-1}} \beta(x, 1/2) - 1/2$$

d' m : $2^{2x-1} \beta(x, x) = \beta(x, 1/2)$

3 c)
$$\begin{aligned} \Gamma(2x) &= \frac{(\Gamma(x))^2}{\beta(x, x)} = \frac{(\Gamma(x))^2}{2^{1-2x} \beta(x, 1/2)} \\ &= \frac{(\Gamma(x))^2 \Gamma(x+1/2)}{2^{1-2x} \Gamma(x) \Gamma(1/2)} = \frac{\Gamma(x) \Gamma(x+1/2)}{2^{1-2x} \Gamma(1/2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{2x-1} \Gamma(x) \Gamma(x+1/2) \end{aligned}$$